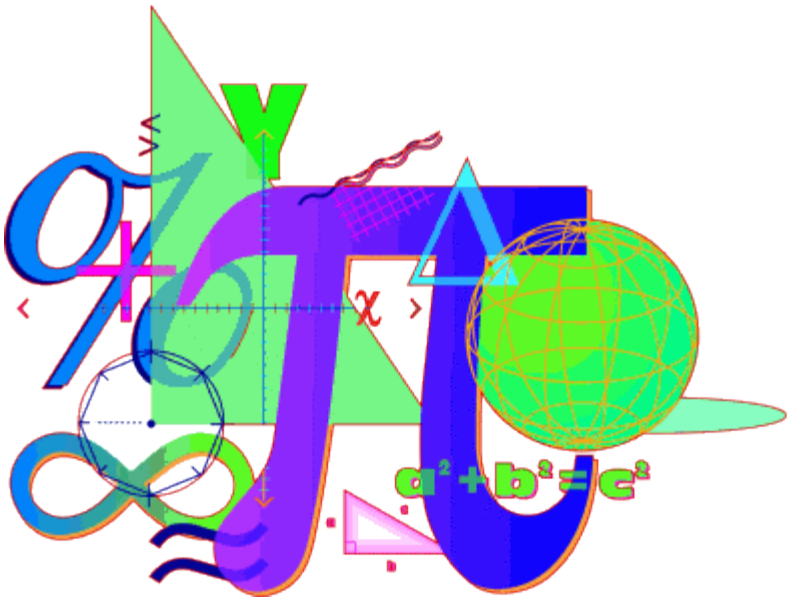
МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ОДЕСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙУНІВЕРСИТЕТ
ОДЕСЬКИЙ АВТОМОБІЛЬНО-ДОРОЖНІЙ КОЛЕДЖ

Математичний довідник

з предмету «Алгебра та початки аналізу»



Одеса 2016р.

Склав викладач: Оленич Ю.Л.

Розглянуто та узгоджено цикловою
Комісією математичних дисциплін

Протокол №___від___ _____2016р.

Голова циклової комісії _____ Л.П.Юдіна.

Пояснювальна записка

Математичний довідник призначений для студентів перших курсів усіх спеціальностей.

Містить основний теоретичний матеріал з предмету «Алгебра та початки аналізу», також містить невелику кількість розв’язаних прикладів.

Запропонований довідник направлений на систематизацію та узагальнення знань з предмету «Алгебра та початки аналізу», на формування спеціальних математичних навичок розв’язання задач, прикладів.

Даний математичний довідник доцільно використовувати при виконанні домашніх контрольних робіт, при підготовці до екзамену.

Тема 1. Функії, їх властивості та графіки

1.1 Функція та її основні властивості

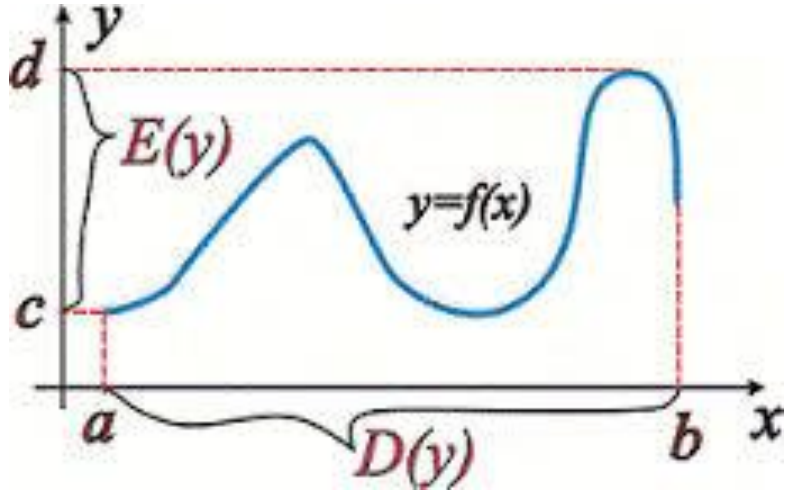
Залежність змінної У від змінної Х, при якій кожному значенню Х відповідає єдине значення У, називається функцією.

Зміну Х називають ***незалежною зміною***, або ***аргументом***, змінну У – залежною, або ***функцією***.

Усі значення, яких набуває аргумент називають ***областю визначення функції***; усі значення, яких набуває функція – ***множиною значень функції***.

Д(у) – область визначення;

Е(у) – множина значення функції;



Для знаходження області визначення функції необхідно перевірити умови:

1) якщо *x* знаходиться у знаменнику, необхідно поставити умову, що знаменник не може дорівнювати нулю

$y = \frac{A(x)}{B(x)}$;

$D(y): B(x) \neq 0$;

2) якщо *x* знаходиться під знаком кореня парного степеня, тоді цей вираз більше або дорівнює нулю

$y = \sqrt[2k]{A(x)}$;

$D(y): A(x) \geq 0$;

3) якщо *x* міститься під знаком логарифма, тоді цей вираз більший за нуль

$y = \log_a A(x)$;

$D(y): A(x) > 0$;

4) якщо *x* міститься в основі логарифма, то цей вираз більший за нуль і не дорівнює одиниці

$y = \log_{A(x)} x$;

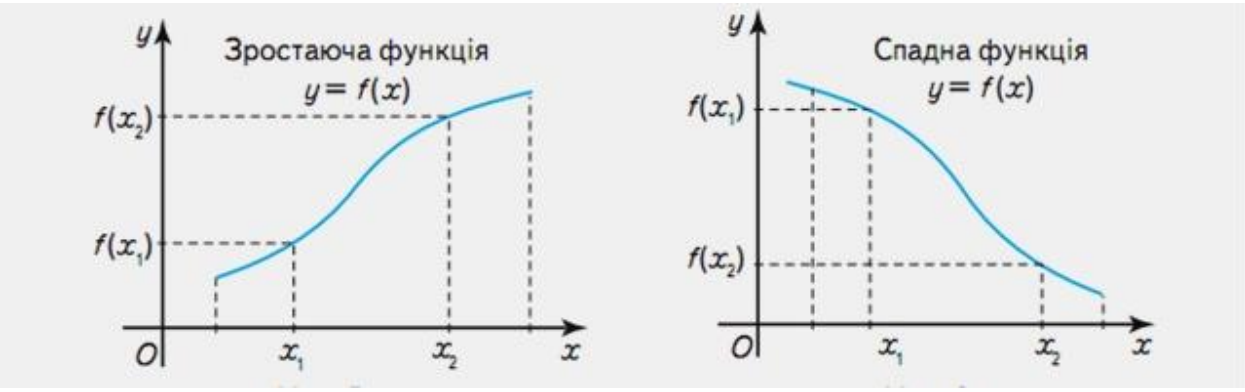
$D(y)$: $\begin{cases} A(x) > 0, \\ A(x) \neq 1 \end{cases}$.

Якщо і одному прикладі використовуються одразу декілька умов, то розглядається система таких умов.

Монотонність

Функція називається ***зростаючою*** на множині X, якщо більшому значенню аргументу відповідає більше значення функції

Функція називається ***спадною*** на множині X, якщо більшому значенню аргументу відповідає менше значення функції

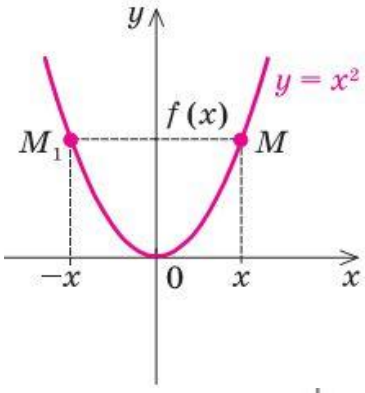


Парність та непарність функції.

Функція називається ***парною***: якщо

1) область визначення Д(у) є симетричною
2) виконується рівність: $f(-x) = f(x)$

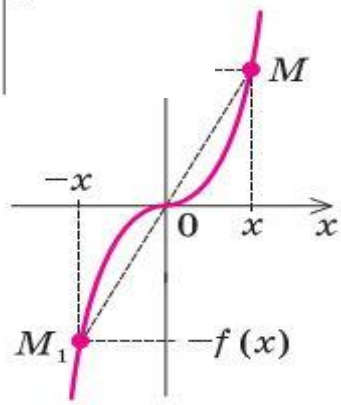
Графік парної функції симетричний відносно осі ОУ



Функція називається ***непарною***: якщо

1) область визначення Д(у) є симетричною
2) виконується рівність: $f(-x) = -f(x)$

Графік непарної функції систематичний відносно початку координат.



Приклад 1. Знайти область визначення функції:

а) $y=x^2+x^3$

так як жодна з умов не підходить, тоді

$D(\text{y}) = R.$

б) $y=\frac{x+2}{x-3}$;

так як $(x-3)$ є знаменником, тоді поставимо умову, що

$$x - 3 \neq 0$$
$$x \neq 3$$

$D(\text{y}) = (-\infty; 3) \cup (3; +\infty)$.

в) $\text{y}=\sqrt{x+6}$

так як (x+6) знаходиться під корінням 2-ого степеня, тоді

$$\text{x} + 6 \geq 0$$

$\text{x} \geq -6$ =>

$D(\text{y}) = [-6; \infty)$.

г) $y = \sqrt{x^2 - 5x + 6}$

Через те що арифметичний квадратний корінь існує лише з невід'ємних чисел,

$x^2 - 5\text{x} + 6 \geq 0$.

Розв'яжемо нерівність методом інтервалів (знайдемо нулі функції

$g = x^2 - 5\text{x} + 6,$

нанесемо їх на координатну пряму і визначимо знак функції на кожному проміжку)

Отже, $D(y) = (-\infty; 2] \cup [3; +\infty)$.

д) $y = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{\sqrt{x}}$

D(y) знаходимо розв'язавши систему $\begin{cases} x - 1 \neq 0, \\ \sqrt{x} \neq 0, \\ x \geq 0; \end{cases} \begin{cases} x \neq 1, \\ x > 0 \end{cases}$.

Отже, *D(y)* = $(0; 1) \cup (1; +\infty)$

Приклад 2. Дослідити функцію на парність/непарність

а) $f(x) = x^2(2x - x^3)$;

Через те що *D(f) = R* ;

$f(-x) = (-x)(2(-x) - (-x)^3) = x^2(-2x + x^3) = -x^2(2x - x^3) = -f(x)$,

$f(x) = x^2(2x - x^3)$ — непарна.

б) $f(x)=\dfrac{3|x|}{x^2+2}$

Через те що *D(f) = R*;

$$f(-x)=\frac{3|-x|}{(-x)^2+2}=\frac{3|x|}{x^2+2}=f(x),$$

то $f(x)=\dfrac{3|-x|}{(-x)^2+2}$ – парна

1.2 Корінь *n*-го степеня. Аріфметичний корінь

Означення та властивості кореня n-го степеня

1. ***Коренем n-го степеня з числа a називають таке число, n-й степінь якого дорівнює a.(n – натуральне число).***

2. ***Арифметичним коренем n-го степеня з невід'ємного числа a називають таке невід'ємне число, n-й степінь якого дорівнює a.***

3. ***Область допустимих значень кореня n-го степеня***

1) ***Корінь непарного степеня існує при будь-яких значеннях*** a ($a \in R$)***;***
2) ***Корінь парного степеня існує тільки при*** $a \geq 0$.

3. ***Основні тотожності:***

1) $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$;

2) $\sqrt[2n]{a^{2n}} = |a|$.

4. ***Властивості арифметичних коренів n-го степеня*** ($m \in N, n \in N, m>1, n>1$).

1) $\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}$, $a \geq 0, b \geq 0$;

($\sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}$);

2) $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$, $a \geq 0, b>0$;

$\left(\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}=\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}\right)$;

3) $\left(\sqrt[n]{a}\right)^k=\sqrt[n]{a^k}$, $k \in Z, a>0$.

Якщо $k \in N$, $k > 1$, то $\left(\sqrt[n]{a}\right)^k = \sqrt[n]{a^k}$ для $a \geq 0$;

4) $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$;

5) $\sqrt[nk]{a^{mk}} = \sqrt[n]{a^m}$, $k \in N$, $k > 1$, $a \geq 0$.

Увага! Показник кореня і показник степеня підкореневого виразу можна поділити або помножити на одне і те саме число, відмінне від нуля.

Щоб добути корінь із степеня, треба показник степеня підкореневого виразу поділити на показник кореня.

1.3 Степені з раціональним показником, їхні властивості

Степенем $a^{\frac{m}{n}}$ ***числа a > 0 з раціональним показником*** $\frac{m}{n}$, ***де*** $m \in Z$, $n \in N$ ***(n>1) називається число*** $\sqrt[n]{a^m}$.

Отже, $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$.

Степінь числа 0 визначений тільки для додатних показників;
за означенням ($0^r = 0$ для будь-якого $r > 0$.

Для будь-яких раціональних чисел p і q і будь-яких додатних a і b справедливі рівності:

$$a^p \cdot a^q = a^{p+qn};$$
$$a^p : a^q = a^{p-q};$$
$$(a^p)^q = a^{pq};$$
$$(ab)^p = a^p b^p;$$

1.4 Ірраціональні рівняння

Рівняння, в яких під знаком кореня міститься змінна (невідо8а), називають ірраціональними.

Наприклад: $\sqrt[3]{x-2} + 3 = 0$, $\sqrt{x} = \sqrt{x} + x$ — ірраціональні рівняння.

Розв'язування ірраціональних рівнянь ґрунтується на приведенні їх за допомогою деяких перетворень до раціонального рівняння. Як правило, це досягається піднесенням обох частин ірраціонального рівняння до одного і того самого степеня (інколи декілька разів).

При піднесенні обох частин рівняння до парного степеня одержане рівняння може мати корені, що не задовольняють заданого рівняння. Такі

корені називаються сторонніми для заданого рівняння. (Це відбувається тому, що із рівності парних степенів двох чисел не слідує рівність цих чисел.

Наприклад: $(-5)^2 = 5^2$, але $(-5) \neq 5$.

Тому слід обов'язково робити перевірку одержаних коренів.

Приклад 1. Розв'яжіть рівняння $\sqrt{x+1} = -3$.

Розв'язання

Рівняння $\sqrt{x+1} = -3$ не має коренів, так як радикал с парним показником - $\sqrt{x+1}$ не може бути від'ємним.

Приклад 2. Розв'язати рівняння $\sqrt{x-2} = 2 - x$.

Розв'язання

$\left(\sqrt{x-2}\right)^2 = (2-x)^2$;

$x - 2 = 4 - 4x + x^2$;

$x^2 - 6x + 6 = 0$;

$x = 2$ або $x = 3$.

Перевірка: 1) $\sqrt{2-2} = 2 - 2$; 2) $\sqrt{3-2} \neq 2 - 3$.

Відповідь: 2

*Приклад 3***.** Розв'яжіть рівняння $\sqrt[3]{2x-1} = 3$.

Розв'язання

$$\sqrt[3]{2x-1} = 3;$$

$$(\sqrt[3]{2x-1})^3 = 3^3;$$

$$2x - 1 = 27;$$

$$x = 14.$$

Відповідь: 14.

Приклад 4. Розв'яжіть рівняння $\sqrt{2x-6} + \sqrt{x+4} = 5$.

Розв'язання

Перенесемо один корінь через знак дорівнює.

$$\sqrt{2x-6} = 5 - \sqrt{x+4}.$$

Обидві частини рівняння піднесемо до квадрата. Одержимо

$$2x - 6 = 25 - 10\sqrt{x+4} + x + 4,$$

після перетворення $10\sqrt{x+4} = 35 - x.$

Знову піднесемо до квадрата обидві частини рівняння:

$$100(x + 4) = (35 - x)^2;$$

$$100x + 400 = x^2 - 70x + 1225;$$
$$x^2 - 170x + 825 = 0;$$

звідси $x_1 = 5$, $x_2 = 165$.

Перевірка: 1) $\sqrt{2 \cdot 5 - 6} = \sqrt{4} = 2$, $5 - \sqrt{5+4} = 5 - 3 = 2$;

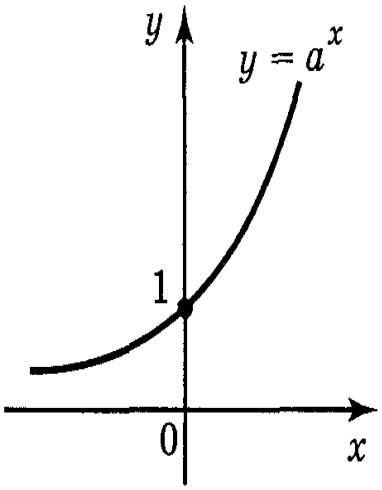
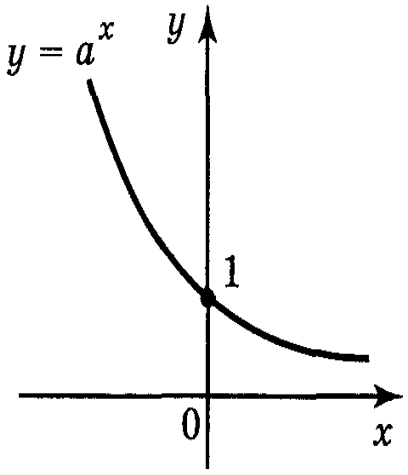
2) $\sqrt{2 \cdot 165 - 6} \neq 5 - \sqrt{165+4}$.

Відповідь: 5.

Тема 2. Показникова та логарифмічна функції

2.1 Показникова та логарифмічна функції їх властивості та графіки

Функція виду $y = a^x$, де $a > 0$, $a \neq 1$, називається показниковою (з основою a).

Показникова функція $y = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$	
$a > 1$	$0 < a < 1$
$D(y) = R$ $E(y) = (0; +\infty)$ Зростає $x_1 > x_2 \Leftrightarrow a^{x_1} > a^{x_2}$ Якщо $x = 0$, то $y = 1$ Якщо $x < 0$, то $y < 1$ Якщо $x > 0$, то $y > 1$ 	$D(y) = R$ $E(y) = (0; +\infty)$. Спадає $x_1 > x_2 \Leftrightarrow a^{x_1} < a^{x_2}$ Якщо $x = 0$, то $y = 1$ Якщо $x < 0$, то $y > 1$ Якщо $x > 0$, то $y < 1$ 

Функція виду $y = \log_a x$, де a — задане число, $a > 0$, $a \neq 1$ називається логарифмічною функцією

Логарифмічна функція $y = \log_a x$	
$a > 1$	$0 < a < 1$
1. $D(y) = (0; +\infty)$	1. $D(y) = (0; +\infty)$
2. $E(y) = R$	2. $E(y) = R$
Зростає	Спадає
3. Якщо $x_1 < x_2$ то $\log_a x_1 < \log_a x_2$	3. Якщо $x_1 < x_2$ то $\log_a x_1 > \log_a x_2$
4. $\log_a x > 0$, якщо $x > 1$ $\log_a x = 0$, якщо $x = 1$ $\log_a x < 0$, якщо $0 < x < 1$	4. $\log_a x > 0$, якщо $0 < x < 1$ $\log_a x = 0$, якщо $x = 1$ $\log_a x < 0$, якщо $x > 1$

2.2 Логарифми та їх властивості

***Логарифмом* додатного числа *b* за основою *a*, де $a > 0$, $a \neq 1$, називається *показник степеня*, до якого треба піднести число *a*, щоб одержати число *b*.**

Наприклад: $\log_2 8 = 3$, оскільки $2^3 = 8$;

$$a^{\log_a b} = b$$

Ця рівність справедлива при $b > 0$, $a > 0$, $a \neq 1$ називається ***основною логарифмічною тотожністю.***

Приклад 1. Обчислити

1. $2^{\log_2 5} = 5$,
2. $2^{-\log_2 5} = \left(2^{\log_2 5}\right)^{-1} = 5^{-1} = \frac{1}{5}$.
3. $\sqrt[3]{25}^{\log_5 27} = 5^{\frac{2}{3}\log_2 27} = \left(5^{\log_2 27}\right)^{\frac{2}{3}} = 27^{\frac{2}{3}} = (3^3)^{\frac{2}{3}} = 3^2 = 9.$
4. $49^{1+\log_7 2} = 49 \cdot 49^{\log_7 2} = 49 \cdot \left(7^{\log_7 2}\right)^2 = 49 \cdot 2^2 = 49 \cdot 4 = 196.$

Для будь-яких $a > 0$, $a \neq 1$ і будь-яких додатних x і y виконуються рівності:

l. $\log_a 1 = 0$;

2. $log_a a = 1$;

3. $log_a xy = log_a x + log_a y$;

4. $log_a \frac{x}{y} = log_a x - log_a y$;

5. $log_a x^p = p\ log_a x\ (p \in R)$;

6. $\log_{a^p} x = \frac{1}{p}\ log_a x\ (p \in R)$;

7. $log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}\ (b > 0, b \neq 1)$.

Приклад 2. Обчислити

(приклади використання формул 3-7)

1) $log_6 18 + log_6 2 = log_6(18 \cdot 2) = log_6 36 = 2$;

2) $log_{12} 48 - log_{12} 4 = log_6 \frac{48}{4} = log_{12} 12 = 1$;

3) $log_6 \sqrt{3} = log_6 3^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} log_6 3 = \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}$;

4) $log_{125} 5 = log_{125} 5 = \frac{1}{3} log_5 5 = \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{1}{3}$;

5) $\frac{\log_3 16}{\log_3 4} = log_4 16 = log_4 4^2 = 2 \log_4 4 = 2 \cdot 1 = 2$.

6) $\log_5 3 \cdot \log_9 4 \cdot \log_2 125 = \log_5 3 \cdot \frac{\log_5 4}{\log_5 9} \cdot \frac{\log_5 125}{\log_5 2} =$

$$= \log_5 3 \cdot \frac{2 \log_5 2}{2 \log_5 3} \cdot \frac{3}{\log_5 2} = 3.$$

Логарифмування і потенціювання виразів.

Дія знаходження логарифма числа (виразу) називається логарифмуванням.

Приклад. Прологарифмуйте вираз $y = \frac{a^2 b^2}{c^3}$.

Розв'язання

$$lg\ y = lg\ \frac{a^2 b^2}{c^3} = lg\ (a^2 b^2) - lg\ c^3 = lg\ a^2 + lg\ b^2 - lg\ c^3 = 2\ lga + 2\ lg\ b - 3\ lg\ c.$$

Дія, обернена до логарифмування, називається потенціюванням.

Потенціювання — знаходження числа (виразу) за його логарифмом.

Приклад. Пропотенціюйте вираз $lg\ x = \frac{1}{2}\ lg\ 5a - 3\ lg\ b + 4\ lg\ c$.

Розв'язання

$lg\ x = \frac{1}{2}\ lg\ 5a - 3\ lg\ b + 4\ lg\ c$;

$lg\ x = lg\ (5a)^{\frac{1}{2}} - lg\ b^3 + lg\ c^4$;

$lg\ x = lg\ \sqrt{5a} - lg\ b^3 + lg\ c^4$;

$lg\ x = lg\ (\sqrt{5a}\ \cdot c^4) - lg\ b^3;$

$lg\ x = lg\ \frac{c^4\sqrt{5a}}{b^3};$

$x = \frac{c^4\sqrt{5a}}{b^3}.$

2.3 Показникові рівняння та нерівності

Показниковими **називаються рівняння, у яких невідоме міститься в показнику степеня при постійних основах**.

Наприклад. Рівняння $2^x + 3 = 0$; $3^{x+1} - 3^x - 1 = 0$ є показниковими.

Найпростішим показниковим рівнянням є рівняная $a^x = b$, де $a > 0$, $a \neq 1$, Оскільки множина значень функції $y = a^x$ — множина додатних чисел, то рівняння $a^x = b$:

1) має один корінь, якщо $b > 0$;

2) не має коренів, якщо $b < 0$.

№ п/п	Способи розв'язування показникових рівнянь	Приклади рівнянь
1	Зведення до однієї основи	$3^{x-2} = 81$ $3^{x-2} = 3^4$ $x - 2 = 4$ $x = 6$ *Відповідь:6* $15^{x^2-5x+6} = 1$ $15^{x^2-5x+6} = 15^0$ $x^2 - 5x + 6 = 0,$ звідси $x_1 = 2$, $x_2 = 3$. *Відповідь:* 2; 3.
2	Винесення спільного множника за дужки	$5^{x-2} + 5^x + 5^{x-1} = 155$ $5^{x-2}(1 + 5^2 + 5) = 155$ $5^{x-2} \cdot 31 = 155$ $5^{x-2} = 5$ $x - 2 = 1$ $x = 3$
3	Зведення до алгебраїчних	$49^x - 8 \cdot 7^x + 7 = 0$ $(7^2)^x - 8 \cdot 7^x + 7 = 0;$ $(7^x)^2 - 8 \cdot 7^x + 7 = 0.$ Нехай $7^x = t$, $t>0$тоді $t^2 - 8t + 7 = 0;$ $t_1 = 7$; $t_2 = 1$.

		Повертаючись до заміни, маємо: $7^x = 7$; або $7^x = 1$; $x = 1$; $7^x = 7^0$; $x = 0$. *Відповідь:* 1; 0.
4	Рівняння з двома основами	$5^{2x-1} - 5^{2x} + 2^{2x} + 2^{2x+2} = 0$ $5^{2x-1} - 5^{2x} + 2^{2x} + 2^{2x+2} = 0$; $2^{2x}(1+ 2^2) = 5^{2x}(1 - 5^{-1})$; $2^{2x} \cdot 5 = 5^{2x} \cdot \frac{4}{5}$; $\frac{2^{2x}}{5^{2x}} = \frac{4}{25}$; $\left(\frac{2}{5}\right)^{2x} = \left(\frac{2}{5}\right)^2$; $2x = 2$; $x = 1$. *Відповідь:* 1. $16^x + 2 \cdot 81^x = 5 \cdot 36^x$ $3 \cdot 4^{2x} + 2 \cdot 9^{2x} = 5 \cdot 4^x \cdot 9^x$; $\frac{3 \cdot 4^{2x}}{9^{2x}} + \frac{2 \cdot 9^{2x}}{9^{2x}} = \frac{5 \cdot 4^x \cdot 9^x}{9^{2x}}$; $3 \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^{2x} - 5 \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^x + 2 = 0$. Заміна $\left(\frac{4}{9}\right)^x = y$, $y > 0$ тоді $3y^2 - 5y + 2 = 0$, звідси $y_1 = \frac{2}{3}$; $y_2 = 1$. $\left(\frac{4}{9}\right)^x = \frac{2}{3}$; або $\left(\frac{4}{9}\right)^x = 1$ $\left(\frac{2}{3}\right)^{2x} = \frac{2}{3}$; $x = 0$. $2x = 1$; $x = \frac{1}{2}$; *Відповідь:* 0; $\frac{1}{2}$.

Розв’язування показникових нерівностей

1. Найпростішою показниковою нерівністю є нерівність вигляду $a^x > b$, де a і b – деякі дійсні числа.
2. При розв’язування нерівностей виду $a^{f(x)} > a^{\varphi(x)}$ і $a^{f(x)} < a^{\varphi(x)}$ використовують властивість монотонності показникової функції.

1) Для $a>1$ з нерівності $a^{f(x)} > a^{\varphi(x)}$ випливає нерівність $f(x) > \varphi(x)$, з нерівності $a^{f(x)} < a^{\varphi(x)}$ випливає нерівність $f(x) < \varphi(x)$.

2) Для $0<a<1$ з нерівності $a^{f(x)} > a^{\varphi(x)}$ випливає нерівність $f(x) < \varphi(x)$, з нерівності $a^{f(x)} < a^{\varphi(x)}$ випливає нерівність $f(x) > \varphi(x)$.

Приклад 1. $6^{x^2+2x} > 6^3$.

Розв'язання

Показникова функція $y = 6^t$ зростає, тому дана нерівність рівносильна нерівності $x^2 + 2x > 3$.

Розв'язуємо нерівність $x^2 + 2x - 3 > 0$ методом інтервалів

Рис. 156

Маємо: $x \in (-\infty; -3) \cup (1; +\infty)$.

Відповідь: $(-\infty; -3) \cup (1; +\infty)$.

Приклад 2. $25^x + 25 \cdot 5^x - 1250 > 0$.

Розв'язання

Зробимо заміну $5^x = t$, тоді дана нерівність запишеться так:

$t^2 + 25t - 1250 > 0$.

Розв'яжемо одержану нерівність методом інтервалів,

тоді $t < -50$ або $t > 25$.

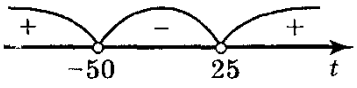


Рис. 157

Отже, маємо дві нерівності:

$5^x < -50$ або $5^x > 25$. Розв'яжемо їх:

1) $5^x < -50$ — розв'язків немає;

2) $5^x > 25$; $5^x > 5^2$; $x > 2$.

Відповідь: $x > 2$.

2.4 Логарифмічні рівняння та нерівності

Логарифмічними рівняннями називають рівняння, які містять змінну під знаком логарифма.

Приклади логарифмічних рівнянь:

$lg\ x = 1 + lg^2 x$, $log_3(x + 3) = 9$, $\sqrt{\lg x} = \lg \sqrt{x}$ і т. д.

Розв'язати логарифмічне рівняння — це означає знайти всі його корені або довести, що рівняння коренів не має.

Найпростіше логарифмічне рівняння має вигляд $log\ x = b$, де $a > 0$, $a \neq 1$, $x > 0$. За означенням логарифма випливає, що $x = a^b$.

№ п/п	Способи розв'язування логарифмічних рівнянь	Приклади рівнянь
1	Найпростіші логарифмічні рівняння	$log_3 (2x + 1) = 2$. *Розв'язання* За означенням логарифма маємо: $2x + 1 = 3^2$, $2x = 8$, $x = 4$. *Перевірка:* $log_3(2 \cdot 4 + 1) = log_3 9 = 2$. *Відповідь:* 4. $log_3 x = log_3(6 - x^2)$. *Розв'язання* Із рівності логарифмів чисел випливає: $x = 6 - x^2$; $x^2 + x - 6 = 0$; $x_1 = -3$, $x_2 = 2$. *Перевірка:* 1. Число -3 не є коренем даного рівняння, бо вираз $log_3(-3)$ — не визначений; 2. $log_3 x = log_3 2$; $log_3(6 - x^2) = \log_3(6 - 2^2) = log_3 2$. *Відповідь:* 2.
2	Зведення до алгебраїчних	$log_2^2 x - 3log_2 x = 4$. *Розв'язання* Позначимо $log_2 x$ через y. Дане рівняння набере вигляду: $y^2 - 3y = 4$; $y^2 - 3y - 4 = 0$; $y_1 = 4$; $y_2 = -1$.

		Звідси $log_2 x = 4$, $log_2 x = -1$; $x = 2^4$; $x = 2^{-1}$; $x = 16$, $x = \frac{1}{2}$. *Перевірка:* 1) $log_2^2 16 - 3\, log_2 16 = 16 - 12 = 4$; 2) $log_2^2 \frac{1}{2} - 3\, log_2 \frac{1}{2} = -1 + 3 = 4$. *Відповідь:* 16; $\frac{1}{2}$.
3	Метод потенціювання	$log_5(x-1) + log_5(x-2) = log_5(x+2)$. *Розв'язання* Пропотенціюємо дану рівність і одержимо: $log_5((x-1)(x-2)) = log_5(x+2)$; $(x-1)(x-2) = x+2$; $x^2 - 2x - x + 2 = x + 2$; $x^2 - 4x = 0$; $x(x-4) = 0$; $x = 0$ або $x = 4$. *Перевірка:* 1) Значення $x = 0$ не є коренем рівняння, тому що вирази $log_5(x-1)$ і $log_5(x-2)$ не мають змісту при $x = 0$. 2) $log_5(x-1) + log_5(x-2) = log_5(4-1) + log_5(4-2) = log_5 3 + log_5 2 = log_5(2\cdot 3) = log_5 6$. $log_5(x+2) = log_5(4+2) = log_5 6$. Отже, $x = 4$ — корінь. *Відповідь:* 4.
4	Зведення логарифмів до однієї і тієї ж основи	$log_3 x - 2\log_{\frac{1}{3}} x = 3$. *Розв'язання* $log_3 x - 2\log_{\frac{1}{3}} x = 3$; $log_3 x - 2 \cdot \frac{\log_3 x}{\log_3 \frac{1}{3}} = 3$; $log_3 x - 2 \cdot \frac{\log_3 x}{-1} = 3$; $log_3 x + 2log_3 x = 3$;

		$3\log_3 x = 3;$ $\log_3 x = 1;$ $x = 3.$ *Перевірка:* $\log_3 3 - 2\log_{\frac{1}{3}} 3 = 1 + 2 = 3.$ Отже, $x = 3$ — корінь. *Відповідь:* 3.
5.	Метод логарифмування	$x^{\lg x} = 100x.$ *Розв'язання* Прологарифмуємо обидві частини рівності ($x > 0$), одержимо: $\lg x^{\lg x} = \lg(100x);$ $\lg x \lg x = \lg 100 + \lg x;$ $\lg^2 x - \lg x - 2 = 0.$ Замінимо $\lg x = y$. Рівняння прийме вигляд $y^2 - y - 2 = 0;$ $y_1 = 2, y_2 = -1.$ Тоді: $\lg x = 2;$ $\lg x = -1;$ $x = 10^2;$ $x = 10^{-1};$ $x = 100.$ $x = 0{,}1.$ *Перевірка:* 1) $x^{\lg x} = 100^{\lg 100} = 100^2$; $100x = 100 \cdot 100 = 100^2.$ Отже, $x = 100$ — корінь. 2) $x^{\lg x} = 0{,}1^{\lg 0{,}1} = 0{,}1^{-1} = \frac{1}{0{,}1} = 10$; $100x = 100 \cdot 0{,}1 = 10.$ Отже, $x = 0{,}1$ — корінь. *Відповідь:* 100; 0,1.

Логарифмічні нерівності

Як відомо, логарифмічна функція $y = \log_a x$ зростає при $a > 1$, спадає — при $0 < a < 1$. Із зростання функції $y = \log_a x$ у першому випадку і спадання — у другому випадку випливає:

1) При $a > 1$ нерівність $\log_a x_2 > \log_a x_1$ рівносильна системі $\begin{cases} x_2 > x_1, \\ x_1 > 0, \\ x_2 > 0. \end{cases}$

2) При $0 < a < 1$ нерівність $\log_a x_2 > \log_a x_1$ рівносильна системі $\begin{cases} x_2 < x_1, \\ x_1 > 0, \\ x_2 > 0. \end{cases}$

Приклад 1. Розв'яжіть нерівність $\log_2 x < 3$.

Розв'язання

Оскільки $3 = \log_2 2^3 = \log_2 8$, то запишемо дану нерівність у вигляді $\log_2 x < \log_2 8$. Оскільки функція $y = \log_2 x$ зростаюча при $x > 0$, то маємо: $\begin{cases} x < 8, \\ x > 0; \end{cases}$ отже, $0 < x < 8$

Відповідь: $x \in (0; 8)$.

Приклад 2. Розв'яжіть нерівність: $\log_{0,5}(x^2 + x) > -1$.

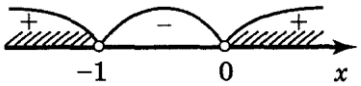
Розв'язання

Так як $-1 = \log_{0,5} 0,5^{-1} = \log_{0,5} 2$, то $\log_{0,5}(x^2 + x) > \log_{0,5} 2$.

Одержана нерівність рівносильна системі

$$\begin{cases} x^2 + x > 0, \\ x^2 + x \le 2; \end{cases} \begin{cases} x^2 + x > 0, \\ x^2 + x - 2 \le 0; \end{cases} \begin{cases} x(x+1) > 0, \\ (x+2)(x-1) \le 0. \end{cases}$$

Розв'язком першої нерівності

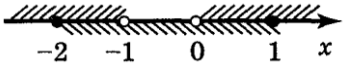


є $(-\infty; -1) \cup (0; +\infty)$.

Розв'язком другої нерівності

є $[-2; 1]$.

Тоді маємо



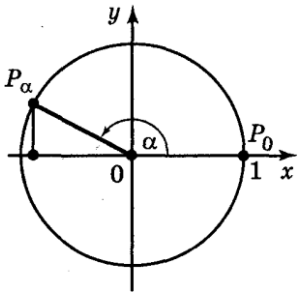
$x \in [-2; -1) \cup (0; 1]$.

Відповідь: $[-2; -1) \cup (0; 1]$.

Тема 3. Тригонометрія

3.1 Синус, косинус, тангенс і катангенс кута. Основні формули

Синусом числа α називається ордината точки P_α, утвореної поворотом точки P_α (1; 0) навколо початку координат на кут в α радіан (позначається ***sin α***). Синус визначений для будь-якого числа α.



Косинусом числа α називається абсциса точки P_α, утвореної поворотом точки P_α (1; 0) навколо початку координат на кут в α радіан (позначається ***cos α***). Косинус визначений для будь-якого числа α.

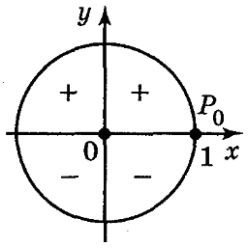
Тангенсом числа α називається відношення синуса числа α до його косинуса: $tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$.

Тангенс визначений для всіх а, крім тих значень, для яких cos α = 0, тобто, $\alpha = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z$.

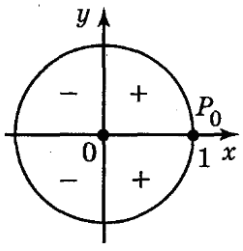
Котангенсом числа α називається відношення косинуса числа α до його синуса: $ctg\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$.

Котангенс визначений для всіх α, крім таких значень, для яких sin α ≠ 0, тобто, а = π *n*, $n \in Z$.

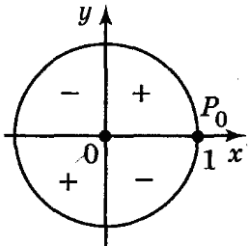
Знаки тригонометричних функцій по координатним чвертям



sin α



cos α



tg α, ctg α,

Співвідношення між тригонометричними функціями одного аргументу

cos² α + sin² α = 1 – основна тригонометрична тотожність	
$\sin\alpha = \pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}$	$\cos\alpha = \pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}$
$tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$	$ctg\alpha = \frac{cos\alpha}{\sin\alpha}$
$tg\alpha = \frac{1}{ctg\alpha}$	$ctg\alpha = \frac{1}{tg\alpha}$

$1+tg^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}$, де $\alpha\neq\frac{\pi}{2}+\pi k, k\in Z$	$1+ctg^2\alpha=\frac{1}{\sin^2\alpha}$, де $\alpha\neq\pi k, k\in Z$
$\text{tg}\alpha\cdot\text{ctg}\alpha=1$	

Приклад 1. Спростити:

1. $\frac{1-\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}=\frac{\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha}=1;$
2. $(1-\cos\alpha)(1+\cos\alpha)=1-cos^2\alpha=sin^2\alpha;$
3. $\frac{1}{sin^2\alpha}-\text{ctg}^2\alpha=1+ctg^2\alpha-\text{ctg}^2\alpha=1;$
4. $sin^2a+cos^2a+\text{tg}^2a=1+\text{tg}^2a=\frac{1}{\cos^2\alpha};$

Приклад 2. . Знайдіть cos α, якщо sin α = 0,6 і $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$.

$\cos\alpha=\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}$

Так як кут α знаходиться у другій чверті, то

$\cos\alpha=-\sqrt{1-\sin^2\alpha}$

$\cos\alpha=-\sqrt{1-0{,}6^2}=-\sqrt{1-0{,}36}=-\sqrt{0{,}64}=-0{,}8$

Відповідь: -0,8

Приклад 3. Обчислити значення виразу $\frac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha}$, якщо $tg\alpha=3$.

Оскільки $\cos\alpha\neq0$, то чисельник і знаменник можна поділити на $\cos\alpha$. Маємо:

$$\frac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha}=\frac{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\cos\alpha}{\cos\alpha}}{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}-\frac{\cos\alpha}{\cos\alpha}}=\frac{tg\alpha+1}{tg\alpha-1}=\frac{3+1}{3-1}=2.$$

Відповідь: $\frac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha}=2.$

Формули зведення

t	$\frac{\pi}{2}-\alpha$	$\frac{\pi}{2}+\alpha$	$\pi-\alpha$	$\pi+\alpha$	$\frac{3\pi}{2}-\alpha$	$\frac{3\pi}{2}+\alpha$	$2\pi-\alpha$
	$90°-\alpha$	$90°+\alpha$	$180°-\alpha$	$180°+\alpha$	$270°-\alpha$	$270°+\alpha$	$360°-\alpha$
cos *t*	cos α	cos α	sin α	-sin α	-cos α	-cos α	-sin α
cos*t*	sin α	-sin α	-cos α	-cos α	-sin α	sin α	cos α
tg*t*	ctg α	-ctg α	-tg α	tg α	ctg α	-ctg α	-tg α

ctg*t*	tg α	-tg α	-ctg α	ctg α	tg α	-tg α	-ctg α

Приклад 1. Обчислити

1. $\cos(-\frac{20\pi}{3}) = \cos\frac{20\pi}{3} = \cos(\frac{2\pi}{3} + 6\pi) = \cos\frac{2\pi}{3} = \cos(\pi - \frac{\pi}{3}) = -\cos\frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}$;
2. $\sin 960° = \sin(240° + 2 \cdot 360°) = \sin 240° = \sin(270° - 30°) = -\cos 30° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Приклад 2. Спростити:

$$\sin\left(180^0 - \alpha\right) + \cos\left(90^0 + \alpha\right) - tg\left(360^0 - \alpha\right) + ctg\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) =$$

$$= \sin\alpha - \sin\alpha + tg\alpha + tg\alpha = 2tg\alpha$$

Тригонометричні функції суми і різниці двох кутів

Формула	**Назва формули**
$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$	Синус суми
$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$	Синус різниці
$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$	Косинус суми
$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$	Косинус різниці
	Тангенс суми
	Тангенс різниці

Приклад 1.

Обчислити:

1. $\sin 58°\cos 13° - \sin 13°\cos 58° = \sin(58° - 13°) = \sin 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$;
2. $\sin 75° = \sin(45° + 30°) = \sin 45°\cos 30° + \sin 30°\cos 45° =$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

Приклад 2. Спростити:

1. $\cos 8\alpha\cos 2\alpha + \sin 8\alpha\sin 2\alpha = \cos(8\alpha - 2\alpha) = \cos 6\alpha$;
2. $\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right)\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right) + \sin\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right)\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right) =$

$$\sin\left(\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)+\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)\right)=\sin 2\alpha.$$

Тригонометричні функції подвійного кута

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$$
$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$
$$tg2\alpha=\frac{2tg\alpha}{1+tg^2\alpha}$$

Приклад 1. Обчислити:

$$а)\cos^2\frac{\pi}{8}-\sin^2\frac{\pi}{8}=\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$б)\sin 15^0\cdot\cos 15^0=\frac{1}{2}\sin 30^0=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}.$$

Приклад 2. Спростити:

$$а)tgx-ctgx=\frac{\sin x}{\cos x}-\frac{\cos x}{\sin x}=\frac{\sin^2 x-\cos^2 x}{\sin x\cos x}=\frac{\cos^2 x-\sin^2 x}{\frac{1}{2}\cdot 2\sin x\cos x}=-2\frac{\cos 2x}{\sin 2x}=$$

$$-2ctg2x.$$

$$б)\cos^4\alpha-\sin^4\alpha=\left(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha\right)\cdot\left(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha\right)=\cos 2\alpha.$$

$$в)\frac{\cos 10\alpha+\sin^2 5\alpha}{\sin 10\alpha}=\frac{\cos^2 5\alpha-\sin^2 5\alpha+\sin^2 5\alpha}{\sin 10\alpha}=\frac{\cos^2 5\alpha}{2\sin 5\alpha\cos 5\alpha}=\frac{\cos 5\alpha}{2\sin 5\alpha}=$$

$$\frac{1}{2}ctg5\alpha$$

Приклад 3. Доведіть тотожність

$$\frac{\sin\alpha+\sin 2\alpha}{1+\cos\alpha+\cos 2\alpha}=tg\alpha$$

$$\frac{\sin\alpha+\sin 2\alpha}{1+\cos\alpha+\cos 2\alpha}=\frac{\sin\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha}{1+\cos\alpha+\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}=\frac{\sin\alpha(\sin\alpha+2\cos\alpha)}{\cos\alpha+2\cos^2\alpha}=$$

$$\frac{\sin\alpha(\sin\alpha+2\cos\alpha)}{\cos\alpha(\sin\alpha+2\cos\alpha)}=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=tg\alpha$$

Що і треба було довести.

Формули суми й різниці синусів та косинусів

Приклад 1. Спростити і обчислити

$$1)\ \cos 75^0 + \cos 15^0 = 2\cos\frac{75^0+15^0}{2}\cos\frac{75^0-15^0}{2} = 2\cos 45^0\cos 30^0 = 2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{2};$$

$$2)\ \cos\frac{5}{12}\pi - \cos\frac{\pi}{12} = -2\sin\frac{\frac{5}{12}\pi+\frac{\pi}{12}}{2}\sin\frac{\frac{5}{12}\pi-\frac{\pi}{12}}{2} = -2\sin\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{6} = -2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2} = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Пниклад 2. Спростіть вираз:

$$\frac{\sin 7x+\sin x}{\cos 7x+\cos x} = \frac{2\sin\frac{7x+x}{2}\cos\frac{7x-x}{2}}{2\cos\frac{7x+x}{2}\cos\frac{7x-x}{2}} = \frac{\sin 4x}{\cos 4x} = \operatorname{tg} 4x;$$

3.2 Обернені тригонометричні функції

Арксинусом числа a ($|a|\le 1$) називається кут з проміжку $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$, синус якого дорівнює a.

Позначається *arcsin(a).*

Тобто *sin(arcsina)= a.*

Арккосинусом числа a ($|a|\le 1$) називається кут з проміжку $[0;\pi]$ косинус якого дорівнює a.

Позначається *y= arccosx*

Тобто *cos (arccosa)=a*

Арктангенсом числа b називається кут з проміжку тангенс якого дорівнює b.

Позначення: *arctg b*

Тобто *tg (arctg b)= b*.

Арккотангенсом числа b називається кут з проміжку , котангенс якого

дорівнює b.
Позначається: *y=arcctg x*
Тобто *ctg (arcctg x)=x*

3.3 Тригонометричні рівняння

3.3.1 найпростіші тригонометричні рівняння

1.

Окремі випадки

2.

Окремі випадки

3.

Окремі випадки

4.

Окремі випадки

Приклад 1. Розв'яжіть рівняння:

1. $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Розв'язання:

$x = \pm \arccos \frac{\sqrt{3}}{2} + 2\pi n, n \in \mathrm{Z}$

$\mathrm{x} = \pm \frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in Z$

2. $2\cos 2\mathrm{x} = 1$

Розв'язання:

$\cos 2x = \frac{1}{2}$

$2x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z$

$x = \pm\frac{\pi}{6} + \pi n, n \in Z$

3. $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = 1;$

Розв'язання:

$\frac{x}{2} = \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z;$

$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z.$

3.3.2 Класифікація тригонометричних рівнянь за методами їх розв'язання

Клас рівнянь та методи розв'язання	Приклади
1. $f(x)\cdot\varphi(x) = 0.$ **Метод розкладання на множники**	$2\cos x\cos 3x = \cos x.$ ***Розв'язання*** $2\cos x\cos 3x - \cos x = 0; \cos x(2\cos 3x - 1) = 0;$ $\cos x = 0$ або $\cos 3x = \frac{1}{2};$ $x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z; x = \pm\frac{\pi}{9} + \frac{2\pi k}{3}, k \in Z$ Відповідь : $\frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z; \pm\frac{\pi}{9} + \frac{2\pi k}{3}, k \in Z$

2.Рівняння , що зводяться до квадратного «простою» заміною. $A\sin^2 x + B\cos x + C = 0;$ $A\cos^2 x + B\sin x + C = 0;$ $Atgx + Bctgx + C$ *Користуємось співвідношеннями*: $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ $ctgx = \frac{1}{tgx}$	$\sin x + 2\cos^2 x - 1 = 0$ *Розвязання:* $\sin x + 2(1 - \sin^2 x) - 1 = 0;$ $2\sin^2 x - \sin x - 1 = 0$ Нехай $\sin x = t, \lvert t\rvert \le 1$, отримаємо : $2t^2 - t - 1 = 0,$ $t_1 = 1$ або $t_2 = -\frac{1}{2}$ Отже, $\sin x = 1$ або $\sin x = -\frac{1}{2}$ $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z$ або $x = (-1)^{k+1}\frac{\pi}{6} + \pi k, k \in Z$
3.Однорідні рівняння $a\sin \alpha x + b\cos \alpha x = 0$ (першого степеня) $a\sin^2 \alpha x + b\sin \alpha x\cos \alpha x + c\cos^2 \alpha x = 0$ (другого степеня)	1) $\sqrt{3}\,sinx + cosx = 0$ Значення *x*, при яких cos *x* дорівнює нулю, не задовольняє даному рівнянню, бо тоді і sin *x* теж дорівнював би нулю, а cos *x* і sin *x* не можуть одночасно дорівнювати нулю. Тому можна розділити обидві частини рівняння почленно на cos *x*. Маємо: $\frac{\sqrt{3}\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\cos x} = 0$ $\sqrt{3}tg\,x + 1 = 0$ $tg\,x = -\frac{1}{\sqrt{3}}.$ $x = -arctg\frac{1}{\sqrt{3}} + \pi n, n \in Z.$ $x = -\frac{\pi}{6} + \pi n, n \in Z$ 2) $\cos^2 x - 3\sin x\cos x + 1 = 0$ *Розв'язання* $\cos^2 x - 3\sin x\cos x + \cos^2 x + \sin^2 x = 0$ $\sin^2 x - 3\sin x\cos x + 2\cos^2 x = 0$ Якщо $\cos x = 0$, то дістанемо, що $\sin x = 0$. Але одночасно, вони не можуть дорівнювати нулю, тому при $\cos x = 0$ рівняння не має коренів. Якщо $\cos x \ne 0$, то, поділивши обидві

	частини рівняння на $\cos^2 x$, дістанемо рівняння, рівносильне даному: $tg^2 x - 3tgx + 2 = 0.$ $\text{tg}\, x = t$ $t^2 - 3t + 2 = 0$ $t_1 = 1, \quad t_2 = 2$ $x_1 = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z$ $x_2 = arctg2 + \pi n, n \in Z.$
4.Перетворення суми (різниці) тригонометричних функцій на добуток. *Зауваження:*нерідко, розв'язуючи рівняння такого вигляду, здобуваємо множини коренів, що перетинаються або одна з них є підмножиною іншої.	$\cos 3x + \sin 2x - \sin 4x = 0$ *Розв'язання* $\cos 3x - 2\sin x \cos 3x = 0;$ $\cos 3x(1 - 2\sin x) = 0;$ $\cos 3x = 0$ або $\sin x = \frac{1}{2}$ $x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3}, n \in Z; x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in Z$ *Відповідь*: $x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3}, n \in Z$
5.Перетворення дробу тригонометричних функцій на суму. *Зауваження.*нерідко, розв'язуючи рівняння такого вигляду, здобуваємо множини коренів, що перетинаються або одна з них є підмножиною іншої.	$\cos 3x \cos 9x = \cos x \cos 7x$ *Розв'язання:* $\cos 6x + \cos 12x = \cos 6x + \cos 8x;$ $\cos 12x - \cos 8x = 0;$ $2\sin 2x \sin 10x = 0;$ $\sin 2x = 0$ або $\sin 10x = 0$ $2x = \pi n, n \in Z; x = \frac{\pi n}{2}, n \in Z.$ $10x = \pi k, k \in Z; x = \frac{\pi k}{10}, k \in Z.$ *Відповідь :* $\frac{\pi k}{10}, k \in Z$

6.Застосування формул зниження степеня.	$\cos^2 3x + \cos^2 4x + \cos^2 5x = \frac{3}{2}.$ *Розв'язання:* $\frac{1+\cos 6x}{2} + \frac{1+\cos 8x}{2} + \frac{1+\cos 10x}{2} = \frac{3}{2};$ $\cos 6x + \cos 8x + \cos 10x = 0;$ $2\cos 8x \cos 2x + \cos 8x = 0;$ $\cos 8x(2\cos 2x + 1) = 0;$ $\cos 8x = 0$ або $\cos 2x = -1$ $x = \frac{\pi}{16} + \frac{\pi n}{8}, n \in Z, x = \pm\frac{\pi}{3} + \pi k, k \in Z$

3.4 Тригонометричні нерівності

Нерівності виду $\sin x \geq a, \sin x < a, \cos x \geq a, tg \leq a$ і т.д.

Розвязуючи найпростіші тригонометричні нерівності, використовують властивості відповідних тригонометричних функцій, а для наочності – одиничне коло або графіки тригонометричних функцій.

Вид нерівності	**Множина розв'язків нерівності** $(n \in Z)$
$\sin x > a$	$x \in (\arcsin a + 2\pi n; \pi - \arcsin a + 2\pi n)$
$\sin x < a$	$x \in (-\pi - \arcsin a + 2\pi n; \arcsin a + 2\pi n)$
$\cos x > a$	$x \in (-\arccos a + 2\pi n; \arccos a + 2\pi n)$
$\cos x < a$	$x \in (\arccos a + 2\pi n; 2\pi - \arccos a + 2\pi n)$
$tgx > a$	$x \in \left(arctga + \pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n\right)$
$tgx < a$	$x \in \left(-\frac{\pi}{2} + \pi n; arctga + \pi n\right)$
$ctgx > a$	$x \in (\pi n; arcctga + \pi n)$
$ctgx < a$	$x \in (arcctga + \pi n; \pi + \pi n)$

Для розв'язування складніших тригонометричних нерівностей треба здійснювати перехід до однієї або декількох найпростіших нерівностей, які розв'язуються за допомогою одиничного кола або графіків тригонометричних функцій.

Зауваження: *кожен проміжок повинен «бути прочитаним» від меншого значення аргументу до більшого.*

Приклад 1. $\cos x < \frac{1}{2}$

Розв'язання:

Помічаємо на осі косинусів $\frac{1}{2}$.Всі значення косинуса, менше $\frac{1}{2}$, лівіше точки $\frac{1}{2}$ на осі косинусів.

Отриману дугу ми **проходимо проти годинникової стрілки,** тобто від точки $\frac{\pi}{3}$ до $\frac{5\pi}{3}$.

$\frac{\pi}{3} + 2\pi n < x < \frac{5\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z$

Приклад 2. $\sin x < \frac{1}{3}$

*Розв'язання:*Так як значення $\frac{1}{3}$ не є табличним, то використаємо визначеннч арксинуса.

$\pi - \arcsin\frac{1}{3} + 2\pi n < x < \arcsin\frac{1}{3} + 2\pi + 2\pi n, n \in Z$

Тема4. Похідна та її застосування

4.1 Похідна. Основні правила диференціювання. Похідні основних елементарних функцій

Похідною функції $y = f(x)$ ***в точці*** x_0 ***називається границя відношення приросту функції до приросту аргументу при умові, що приріст аргументу прямує до нуля, а границя існує***, тобто

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Правила диференціювання суми, різниці, добутку і частки

Якщо функції u=u(x), v=v(x) диференційовані в точці x, сума, різниця, добуток і частка цих функцій (при $v(x) \neq 0$) також диференційовані в цій точці і справедливі такі формули:

1. $(u \pm v)' = u' \pm v';$
2. $(uv)' = u'v + uv';$
3. $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}.$ при C=Const

$$\left(\frac{u}{c}\right)' = \frac{u'}{c}; \quad \left(\frac{c}{v}\right)' = -\frac{cv'}{v^2}.$$

Похідні основних елементарних функцій

1. $\left(x^n\right)' = nx^{n-1}$
2. $\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
3. $\left(\sin x\right)' = \cos x$
4. $\left(\cos x\right)' = -\sin x$
5. $\left(tgx\right)' = \frac{1}{\cos^2 x}$
6. $\left(ctgx\right)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$
7. $\left(\arcsin x\right)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (|x| < 1)$
8. $\left(\arccos x\right)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (|x| < 1)$
9. $\left(arctgx\right)' = \frac{1}{1+x^2}$
10. $\left(arcctgx\right)' = -\frac{1}{1+x^2}$
11. $\left(a^x\right)' = a^x \ln a \quad (a > 0, a \neq 1)$
12. $\left(e^x\right)' = e^x$
13. $\left(\ln x\right)' = \frac{1}{x} \quad (x > 0)$
14. $\left(\log_a x\right)' = \frac{1}{x \ln a} \quad (x > 0, a > 0, a \neq 1)$

Приклад 1. Знайдіть похідні функцій

а) $f(x) = x^3 - x^2 + x - 4$; б) $f(x) = \cos x + \sin x + 5$; в) $f(x) = x^6 + tg\,x - ctg\,x$.

Розв'язання

а) $f'(x) = (x^3 - x^2 + x - 4)' = (x^3)' - (x^2)' + (x)' - 4' = 3x^2 - 2x + 1 + 0 = 3x^2 - 2x + 1;$

б) $f'(x) = (\cos x + \sin x + 5) = (\cos x)' + (\sin x)' + 5' = -\sin x + \cos x + 0 = \cos x - \sin x.$

в) $f'(x) = (x^6 + \operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x)' = (x^6)' + (\operatorname{tg} x)' - (\operatorname{ctg} x)' = 6x^5 + \dfrac{1}{\cos^2 x} - \left(-\dfrac{1}{\sin^2 x}\right) =$

$= 6x^5 + \dfrac{1}{\cos^2 x} + \dfrac{1}{\sin^2 x} = 6x^5 + \dfrac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos^2 x \cdot \sin^2 x} = 6x^5 + \dfrac{4}{4\cos^2 x \cdot \sin^2 x} = 6x^5 + \dfrac{4}{\sin^2 2x}.$

Приклад 2. Знайдіть похідні функцій:

а) $y = x \cdot \sin x$; б) $y = 5x^5 + 6x^2 + 2x - 7\operatorname{tg} x.$

Розв'язання

а) $y' = (x \sin x)' = x' \sin x + x (\sin x)' = 1 \cdot \sin x + x \cos x = \sin x + x \cos x;$

б) $y' = (5x^5 + 6x^2 + 2x - 7 \operatorname{tg} x)' = (5x^5)' + (6x^2)' + (2x)' - (7 \operatorname{tg} x)' =$

$= 5 \cdot (x^5)' + 6 \cdot (x^2)' + 2 \cdot x' - 7 \cdot (\operatorname{tg} x)' = 5 \cdot 5x^4 + 6 \cdot 2 \cdot x + 2 \cdot 1 - 7 \cdot \dfrac{1}{\cos^2 x} = 25x^4 + 12x + 2 - \dfrac{7}{\cos^2 x}.$

Приклад 3. Знайдіть похідні функцій

а) $y = \dfrac{x^3}{x^2 + 1}$; б) $y = \dfrac{x^3}{\sin x}.$

Розв'язання

а) $y' = \left(\dfrac{x^3}{x^2 + 1}\right)' = \dfrac{(x^3)'(x^2 + 1) - x^3(x^2 + 1)'}{(x^2 + 1)^2} = \dfrac{3x^2(x^2 + 1) - x^3 \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2} = \dfrac{x^4 + 3x^2}{(x^2 + 1)^2}.$

б) $y' = \left(\dfrac{x^3}{\sin x}\right)' = \dfrac{(x^3)' \sin x - x^3 (\sin x)'}{\sin^2 x} = \dfrac{3x^2 \sin x - x^3 \cos x}{\sin^2 x}.$

4.2 Похідна складеної функції

$$(f(g(x)))' = f'_u(u) \cdot g'_x(x), \text{ де } u = g(x).$$

Приклад 1. Знайти похідну складеної функції

а) $y = \sqrt{\cos x};$

$y' = (\sqrt{\cos x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{\cos x}} \cdot (\cos x)' = \dfrac{-\sin x}{2\sqrt{\cos x}};$

б) $y = \operatorname{ctg}^3 x$;

$$y' = (\operatorname{ctg}^3 x)' = 3\operatorname{ctg}^2 x \cdot (\operatorname{ctg} x)' = 3\operatorname{ctg}^2 x \cdot \left(-\frac{1}{\sin^2 x}\right) = -\frac{3ctg^2 x}{\sin^2 x} = -\frac{3\cos^2 x}{\sin^4 x}.$$

Приклад 2. Обчисліть значення похідної функції в точці :

а) $y = \ln(e^{2x} + 3x^3)$,якщо x_0=0; б) $y = \sqrt{3x^2 + 2x - 1}$, в точці x_o =1.

Розв'язання

а) $y' = \frac{1}{e^{2x}+3x^3} \cdot (2e^{2x} + 9x^2) = \frac{2e^{2x}+9x^2}{e^{2x}+3x^3}$;

$y'(0) = \frac{2e^0+9\cdot 0}{e^0+3\cdot 0} = \frac{2}{1} = 2$;

б) $y' = \frac{1}{2\cdot\sqrt{3x^2+2x-1}} \cdot (6x + 2) = \frac{6x+2}{2\cdot\sqrt{3x^2+2x-1}} = \frac{3x+1}{\sqrt{3x^2+2x-1}}$;

$y'(1) = \frac{3+1}{\sqrt{3+2-1}} = \frac{4}{\sqrt{4}} = 2.$

4.3 Механічний зміст похідної

Якщо матеріальна точка рухається прямолінійно і її координата змінюється по закону $s = s(t)$ *, то швидкість її руху* $v(t)$ *в момент часу* t *дорівнює похідній* $s'(t)$*:* $v(t) = s'(t)$

Приклад. Точка рухається прямолінійно по закону $s(t) = 5t^2 + t + 3$ (s–шлях в метрах, t–час в секундах). Знайдіть швидкість точки в момент часу $t = 2c$.

Розв'язання

$v(t) = s'(t)$

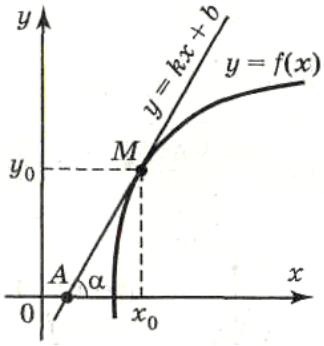
$S'(t) = 10t + 1$;

$S'(2) = 10 \cdot 2 + 1 = 21$м/с

*Відповідь:*21м/с

4.4 Геометричний зміст похідної . Рівняння дотичної

Значення похідної функції $y = f(x)$ *в точці* x_0 *дорівнює кутовому коефіцієнту дотичної до графіка функції в точці з абсцисою* x_0 *:* $f'(x_0) = k = tg\alpha$.



Рівняння дотичної до графіка функції запишемо як рівняння прямої, що проходить через точку $M_0(x_0\,;\,f(x_0))$ і має кутовий коефіцієнт $k = f'(x_0)$:

$$y = f(x_0) + f'(x_0)\cdot(x - x_0)$$

Приклад 1. Складіть рівняння дотичної до графіка функції $y = x^2 - 4x$ в точці $x_o = 1$.

Розв'язання

1. $y = f(x_0) + f'(x_0)\cdot(x - x_0)$ — рівняння шуканої дотичної.
2. $f'(x_0) = 2x - 4$
3. $f'(x_0) = f'(1) = 2\cdot 1 - 4 = -2$
4. $y_o = 1^2 - 4\cdot 1 = 1 - 4 = -3$.
5. Підставляємо значення $x_o = 1$, $y_o = -3$, $f'(x_o) = -2$ у рівняння дотичної: $y = -3 - 2x + 2$, або $y = -1 - 2x$

Відповідь: $y = -1 - 2x$

Приклад 2. Записати рівняння дотичної до графіка функції $y = \dfrac{x^3}{x^4 - 1}$ в точці $x_0 = 2$.

$$f(x_0) = f(2) = \frac{2^3}{2^4 - 1} = \frac{8}{16 - 1} = \frac{8}{15}$$

$$f'(x) = \left(\frac{x^3}{x^4 - 1}\right)' = \frac{(x^3)'\cdot(x^4 - 1) - x^3\cdot(x^4 - 1)'}{(x^4 - 1)^2} = \frac{3x^2\cdot(x^4 - 1) - x^3\cdot 4x^3}{(x^4 - 1)^2} =$$

$$= \frac{3x^6 - 3x^2 - 4x^6}{(x^4 - 1)^2} = \frac{-x^6 - 3x^2}{(x^4 - 1)^2} = -\frac{x^2\cdot(x^4 + 3)}{(x^4 - 1)^2}$$

$$f'(x_0) = f'(2) = -\frac{2^2\cdot(2^4 + 3)}{(2^4 - 1)^2} = -\frac{4\cdot(16 + 3)}{(16 - 1)^2} = -\frac{4\cdot 19}{15^2} = -\frac{76}{225}$$

$y = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$

$y = \frac{8}{15} - \frac{76}{225} \cdot (x - 2)$

$225y = 120 - 76x + 152$

$76x + 225y - 272 = 0$ – *ð³âíÿííÿ äîòè÷íî¿* .

Відповідь: $76x + 225y - 272 = 0$.

4.5 Ознаки зростання (спадання) функції на проміжку

Критичні точки функції – це внутрішні точки області визначення функції, в яких похідна дорівнює нулю або не існує. Стаціонарні точки – це точки, похідна в яких дорівнює нулю

Якщо $f'(x) \succ 0$ ***на проміжку, то функція*** $f(x)$ ***зростає на цьому проміжку.***

Якщо $f'(x) \prec 0$ ***на проміжку, то функція*** $f(x)$ ***спадає на цьому проміжку.***

Знаходження проміжків зростання та спадання функції можна виконувати за таким **планом**:

1. Знайти область визначення заданої функції $y = f(x)$.
2. Знайти похідну $f'(x)$.
3. Розв'язати нерівності:

а) $f'(x) \succ 0$, указати проміжки зростання функції ;

б) $f'(x) \prec 0$, указати проміжки спадання функції .

*Приклад 1***.** Знайдіть проміжки монотонності функції $y = x^3 - 3x^2$.

Розв'язання

1. Область визначення функції: *D(y) = R.*
2. Знаходимо похідну $y' = 3x^2 - 6x$.
3. Розв'язуємо нерівності: а) $y' > 0$; б) $y' < 0$. Розв'язуємо ці нерівності методом інтервалів, для цього знаходимо нулі похідної: $3x^2 - 6x = 0$, $3x(x - 2) = 0$, $x = 0$ або $x = 2$. Наносимо на координатну пряму (рис. 37) нулі похідної і визначаємо знаки похідної на кожному проміжку:

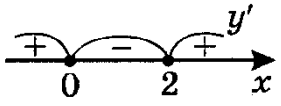


Рис. 1

$y'(-1) = 3 \cdot (-1)^2 - 6 \cdot (-1) = 3 + 6 = 9 > 0;$

$y'(1) = 3 \cdot I^2 - 6 - 1 = -3 < 0;$

$y'(3) = 3 \cdot 3^2 - 6 \cdot 3 = 27 - 18 = 9 > 0.$

а) $y' > 0$ в кожному із проміжків $(-\infty; 0); (2; +\infty)$, отже, функція на цих проміжках зростає.

б) $y' < 0$ на проміжку (0; 2), отже, функція на цьому проміжку спадає.

Відповідь: функція зростає на кожному із проміжків $(-\infty;0)$**;**$(2;+\infty)$; спадає на проміжку (0; 2).

Приклад21. Доведіть, що функція $f(x) = x + \frac{1}{x}$ зростає на проміжку $(1; +\infty)$.

Розв'язання

Знайдемо похідну: $f'(x)=\left(x+\frac{1}{x}\right)^{I}=(x)'+\left(\frac{1}{x}\right)^{I}=1-\frac{1}{x^2}=\frac{x^2-1}{x^2}$.

Якщо $x > 1$, $\frac{x^2-1}{x^2}>0$ то тобто $f'(x) > 0$ при $x > 1$, і тому функція зростає на проміжку $(1; +\infty)$.

4.6 Дослідження функції на екстремум

Окіл точки x_0 - це будь-який проміжок, який містить цю точку.

Точка максимуму функції – це точка x_{max}, якщо для всіх x з деякого околу x_{max} виконується нерівність $f(x)< f(x_{max})$.

Точка мінімуму – це точка x_{min}, якщо для всіх x з деякого околу x_{min} виконується нерівність $f(x)> f(x_{max})$.

Точки екстремуму (екстремальні точки) – це точки максимуму і мінімуму функції.

Максимум функції – це значення функції в точці $x_{\max}$. Познач. $y_{\max}$

Мінімум функції – це значення функції в точці $x_{\min}$. Познач. $y_{\min}$

Зауваження: Екстремальні точки – це точки, в яких функція набуває відповідно найбільшого чи найменшого значення в порівнянні із значеннями функції, яких вона набуває в точках досить близьких до екстремальних.

Точки екстремуму називають локальними екстремумами. Локальний екстремум (максимум або мінімум) не слід плутати з найбільшим (найменшим) значенням функції.

Необхідна умова існування екстремуму:

Точками екстремуму функції можуть бути тільки її критичні точки.

Достатня умова існування екстремуму:

Якщо при переході через критичну точку x_0 похідна функції змінює знак з плюса на мінус, то точка x_0 є точкою максимуму, якщо при переході через критичну точку x_0 похідна функції змінює знак з мінуса на плюс, то точка x_0 є точкою мінімуму.

Приклад.

Знайдіть екстремуми функції $f(x) = x^4 - 4x^3$.

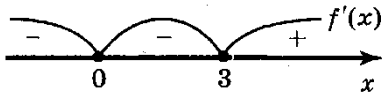
Розв'язання

Область визначення функції — *R.*

Знайдемо похідну:

$f`(x)= (x^4 – 4x^3) = 4x^3 – 12x^2 = 4x^2(x – 3)$.

Знайдемо стаціонарні точки: $f`(x) = 0$, $4x^2(x – 3) =$



0, $x = 0$ або $x = 3$.

Наносимо стаціонарні точки на координатну пряму та визначаємо знак похідної на кожному інтервалі.

$x = 3$ — точка мінімуму, бо при переході через цю точку похідна змінює знак з «–» на «+»: $x_{min} = 3$.

Точка $x = 0$ не є точкою екстремуму, бо похідна не змінює знак при переході через цю точку.

Отже, $y_{min} = f(3) = 3^4 - 4 \cdot 3^3 = -27$.

Відповідь: $y_{min} = f(3) = -27$.

4.7 Дослідення функції за допомогою похідної

Дослідження функції і побудову її графіка будемо виконувати за таким планом:

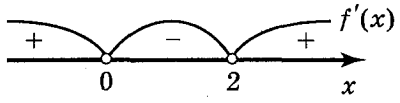
1. Знаходимо область визначення функції.
2. Знаходимо точки перетину графіка з координатними осями.
3. З'ясовуємо парність (непарність), періодичність функції.
4. Знаходимо похідну та стаціонарні точки.
5. Знаходимо проміжки зростання, спадання, точки екстремуму та екстремальні значення функції.
6. З'ясовуємо поведінку функції на кінцях області визначення.
7. На підставі проведеного дослідження будуємо графік функції.

Приклад. Дослідіть функцію $f(x) = x^3 - 3x^2$ і побудуйте її графік.

Розв'язання

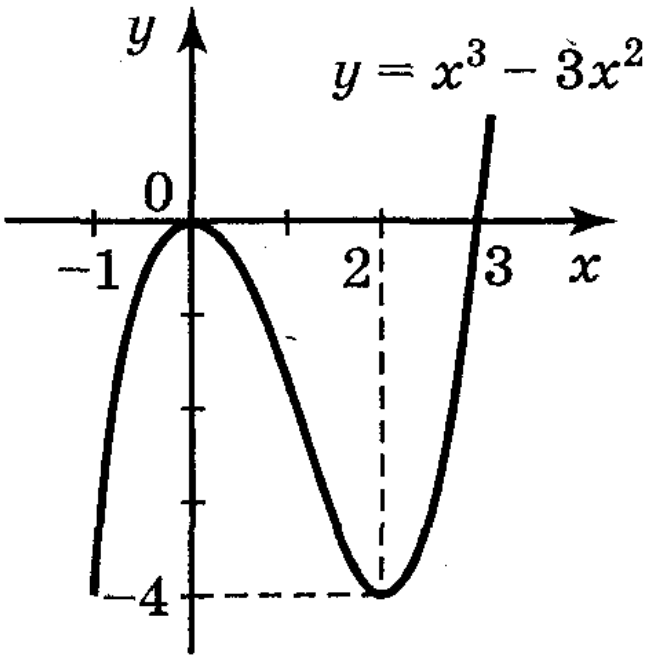
1. $D(f) = R$.
2. Знайдемо абсциси точок перетину графіка з віссю *OX:*
   $x^3 - 3x^2 = 0$; $x^2(x - 3) = 0$; $x = 0$ або $x = 3$.
   Знайдемо ординату точки перетину графіка з віссю OY:
   $y = 0^3 - 3 \cdot 0^2 = 0$.
3. Оскільки $f(-x) = (-x)^3 - 3(-x)^2 = -x^3 - 3x^2$, то функція не є парною, не є непарною. Функція неперіодична.
4. Знайдемо похідну $f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x - 2)$. $D(f') = R$. Знайдемо стаціонарні точки:
   $f'(x) = 0$; $3x(x - 2) = 0$; $x = 0$ або $x = 2$.
5. Складемо таблицю:

x	$(-\infty; 0)$	0	$(0; 2)$	2	$(2; +\infty)$
$f'(x)$	+	0	–	0	+
$f(x)$	↗	0	↘	–4	↗
		max		min	

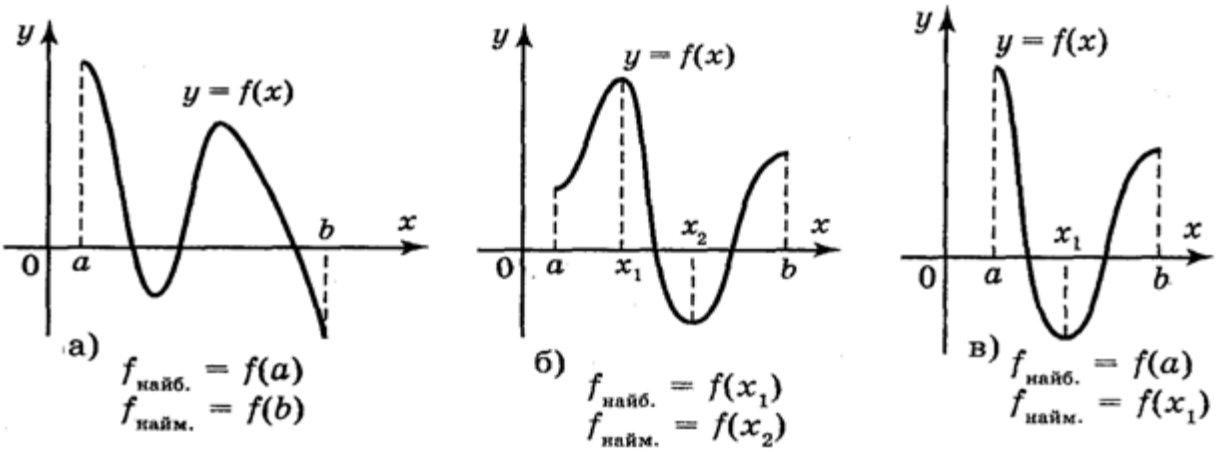


Стаціонарні точки розбивають координатну пряму на три проміжки (рис. 63): (-∞; 0), (0; 2), (2; +∞). На рисунку 63 вказано знаки похідної. (Символ ↗ в таблиці означає, що функція зростає, а символ ↘ означає, що функція спадає.)

6. Використовуючи результати дослідження, будуємо графік функції $y = x^3 - 3x^2$



4.8 Знаходження найбільшого значення функції на відрізку



Алгоритм знаходження найбільшого значення функції на відрізку

1) знайти значення функції на кінцях проміжку, тобто числа *f(a)* і *f(b);*

2) знайти значення функції в тих стаціонарних точках, які належать інтервалу (*a; b);*

3) *із* знайдених значень вибрати найбільше і найменше.

Приклад 1. Знайти найбільше і найменше значення функції **f(x)** на вказаному відрізку, якщо

$f(x)=3x^4- 6x^2 +1, \quad [0;2]$

Розв'язання:

Знайдемо значення функції в точках $x = 0$ та $x = 2$:

$f(0)=1$

$f(2)=3\cdot16 - 6\cdot4+1= 48 – 24 + 1=25$

Знайдемо $f'(x)$: $f'(x)=12x^3 -12x$

Знайдемо стаціонарні точки:

$f'(x)=0, \ 12x(x^2 – 1)=0$

$12x(x-1)(x+1)=0$

$x=0; \ x=1; \ x=-1$

$0 \in [0;2], \ 1 \in [0;2], \ -1 \notin [0;2]$

Знайдемо значення функції в точці $x=1$

$f(1)=-2$

Відповідь: $\max\limits_{[0;2]} f(x)= f(2)=25$

$\min\limits_{[0;2]} f(x)= f(1)=-2$

Приклад 2. Знайдіть найбільше і найменше значення функції $f(x) = x + e^{-x}$ на відрізку [-1; 2].

Розв'язання

Знайдемо значення функції в точках $x = -1$ та $x = 2$:

$f(-1) = -1 + e^1 = e – 1, \ f(2) = 2 – e^{-2} = 2 – \frac{1}{e^2}$.

Знайдемо $f'(x)$: $f'(x) = (x + e^{-x})^1 = 1 - e^{-x}$. Знайдемо стаціонарні точки:

$f'(x) = 0; \ 1 - e^{-x} = 0; \ 1 - \frac{1}{e^x} = 0; \ e^x = 1; \ x = 0.$

Знайдемо значення функції в точці $x = 0$: $f(0) = 0 + e^0 = 1$.

Із чисел $e - 1 \approx 1{,}72$, $2 - \frac{1}{e^2} \approx 1{,}86$ та 1 найбільшим є $2 - \frac{1}{e^2}$, а найменшим -1.

Відповідь: : max f(x)= f(2) =2 - $\frac{1}{e^2}$ *; min f(x)= f(0) = 1.*

Тема 5. Інтеграл та його застосування

5.1 Первісна та її властивості. Невизначений інтеграл

Функція $F(x)$ ***називається первісною функції*** $f(x)$ ***на деякому проміжку, якщо для всіх x із цього проміжку виконується рівність :*** $F'(x) = f(x)$**.**

Проміжок на практиці зазвичай не вказують, але мають на увазі (як область визначення функції).

Таблиця первісних

$1. F(x) = kx, \quad f(x) = k,\ x \in R.$

$2. F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1}, \quad f(x) = x^n,\ x \in (0;\infty), n \neq -1.$

$3. F(x) = \ln|x|, \quad f(x) = \frac{1}{x},\ x \neq 0;$

$4. F(x) = e^x, \quad f(x) = e^x,\ x \in R.$

$5. F(x) = \frac{a^x}{\ln a}, \quad f(x) = a^x,\ x \in R.$

$6. F(x) = -\cos x, \quad f(x) = \sin x,\ x \in R.$

$7. F(x) = -ctgx, \quad f(x) = \frac{1}{\sin^2 x},\ x \neq \pi n.$

Якщо $F(x)$ ***первісна для функції*** $f(x)$ ***, то вираз*** $F(x)+C$***, де C може приймати будь-яке стале значення, називається невизначеним інтегралом від функції*** $f(x)$ ***і позначається символом***

$$\int f(x)dx,$$

де $\int$ - позначення інтегралу ; $f(x)$- підінтегральна функція ; $f(x)dx$- підінтегральний вираз.

Таким чином, рівність $\int f(x)dx = F(x) + C$ є лише інший запис співвідношення $F'(x) = f(x)$, або $(F(x) + C)' = f(x)$.

Основні властивості невизначеного інтеграла

1. $\int dF(x) = F(x) + C$**.** Невизначений інтеграл від диференціала деякої функції дорівнює цій функції з точністю до постійного доданка.

2. $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x).$ Похідна від невизначеного інтеграла дорівнює підінтегральній функції. Завдяки цій властивості правильність інтегрування перевіряється диференціюванням.

3. $d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx.$ Диференціал від невизначеного інтеграла дорівнює підінтегральному виразу.

4. $\int \left(f(x) + g(x)\right)dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx.$ Інтеграл від суми двох функцій дорівнює сумі інтегралів від цих функцій.

5. $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$. Постійний множник можна виносити за знак інтеграла

Таблиця основних інтегралів.

$$1.\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{\alpha + 1} + C, n \neq -1.$$

$$2.\int dx = x + C.$$

$$3.\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C.$$

$$4.\int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} + C.$$

$$5.\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C.$$

$$6.\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C.$$

$$7.\int \sin x dx = -\cos x + C.$$

$$8.\int \cos x dx = \sin x + C.$$

$$9.\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C.$$

$$10.\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C.$$

$$11.\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} arctg\frac{x}{a} + C.$$

$$12.\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C.$$

$$13.\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C.$$

$$14.\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C.$$

Приклад 1.

Знайти первісну функції $f(x)=5x^4-3$, графік якої проходить через точку А (1;-2).

$y=F(x)+C=x^5-3x+C$

$-2=1^5-3\cdot 1+C$

$-2=1-3+C$

$-2=-2+C$

$C=0$

$F(x)=x^5-3x$ – первісна, яка проходить через точку А.

*Приклад 2.*Знайти інтерал

$$1.\int \frac{dx}{x^4}=\int x^{-4}dx=\frac{x^{-4+1}}{-4+1}+C=\frac{x^{-3}}{-3}+C=-\frac{1}{3x^3}+C$$

$$2.\int 5^x=\frac{5^x}{\ln 5}+C.$$

$$3.\int \sqrt{x}dx=\int x^{\frac{1}{2}}dx=\frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}+C=\frac{x^{\frac{1}{2}}\cdot x}{\frac{3}{2}}+C=\frac{2x\sqrt{x}}{3}+C.$$

$$4.\int \sqrt{x}dx=\int x^{-\frac{1}{2}}dx=\frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1}+C=\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}+C=2\sqrt{x}+C.$$

$$5.\ \int (3x-4)^2dx=\frac{1}{3}\cdot\frac{(3x-4)^3}{3}+C=\frac{(3x-4)^3}{9}+C$$

$$6.\int 4^{5x}dx=\frac{1}{5}\cdot\frac{4^{5x}}{\ln 4}+C$$

$$7.\int \frac{dx}{\cos^2\left(\frac{x}{4}-1\right)}=\frac{1}{\frac{1}{4}}tg\left(\frac{x}{4}-1\right)+C=4tg\left(\frac{x}{4}-1\right)+C$$

$$8.\int \frac{dx}{14x-3}=\frac{1}{14}\ln|14x-3|+C.$$

$$9.\int \frac{x-4}{x+2}dx = \int \frac{x+2-2-4}{x+2}dx = \int \frac{x+2-6}{x+2}dx = \int \left(\frac{x+2}{x+2} - \frac{6}{x+2}\right)dx = \int \left(1 - \frac{6}{x+2}\right)dx =$$

$$= x - 6\ln|x+2| + C;$$

5.2 Визначений інтеграл

Основні властивості визначеного інтеграла

1. Сталий множник можна виносити з-під знака визначеного інтеграла, тобто $\int_a^b c \cdot f(x)dx = c \cdot \int_a^b f(x)dx.$

2. Якщо $f_1(x)$ та $f_2(x)$ інтегровані на [a; b], то

$$\int_a^b \left(f_1(x) \pm f_2(x)\right)dx = \int_a^b f_1(x)dx \pm \int_a^b f_2(x)\,dx.$$

3. Якщо у визначеному інтегралі поміняти місцями межі інтегрування, то інтеграл змінить лише свій знак на протилежний, тобто $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx.$

4. Визначений інтеграл з однаковими межами інтегрування дорівнює нулю $\int_a^a f(x)dx = 0.$

5. Якщо $f(x)$ — інтегрована в будь-якому із проміжків: [a; b], [a; c], [c; b], то $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$

Визначений інтеграл обчислюється за формулою Ньютона - Лейбніца

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$ *формула Ньютона - Лейбніца*

Наприклад:

1) $$\int_1^2 x^2 dx = \frac{x^3}{3}\Big|_1^2 = \frac{2^3}{3} - \frac{1^3}{3} = \frac{8}{3} - \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$$

2) $$\int_0^\pi \sin x dx = -\cos x\Big|_0^\pi = -\cos\pi - (-\cos 0) = -(-1) + 1 = 2$$

3) $\int_{-1}^{1}(2x+3x^2+1)dx = \left(2\cdot\frac{x^2}{2}+3\cdot\frac{x^3}{3}+x\right)\Big|_{-1}^{1} = (x^2+x^3+x)\Big|_{-1}^{1} =$

$= (1^2+1^3+1)-((-1)^2+(-1)^3+(-1)) = 3-(1) = 4$

4) $\int_{0}^{4}(\frac{1}{4}x-1)^5 dx = \frac{1}{\frac{1}{4}}\cdot\frac{\left(\frac{1}{4}x-1\right)^{5+1}}{5+1}\Bigg|_{0}^{4} = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{4}x-1\right)^6\Big|_{0}^{4} = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{4}\cdot 4-1\right)^6 -$

$-\frac{2}{3}\left(\frac{1}{4}\cdot 0-1\right)^6 = 0-\frac{2}{3} = -\frac{2}{3}.$

5) $\int_{0}^{\frac{\pi}{3}}\cos 3x dx = \frac{1}{3}\sin 3x\Big|_{0}^{\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{3}(\sin 3\cdot\frac{\pi}{3}-\sin 2\cdot 0) = 0.$

5.3 Фізичний зміст визначеного інтегралу

№	Величини	Знаходження похідної	Знаходження інтеграла
1	S – переміщення v – швидкість a – прискорення	$v(t) = S'(t)$ $a(t) = v'(t)$	$S = \int_{t_1}^{t_2} v(t)dt$ $v = \int_{t_1}^{t_2} a(t)dt$
2	A – робота F – сила	$F(x) = A'(x)$	$A = \int_{a}^{b} F(x)dx$
3	A – робота N - потужність	$N(t)=A'(t)$	$A = \int_{t_1}^{t_2} N(t)dt$

4	q – електричний заряд I – сила струму	$I(t) = q'(t)$	$q = \int_{t_1}^{t_2} I(t)dt$
5	m – маса неоднорідного стержня, ρ – лінійна густина стержня	$\rho(l) = m'(l)$	$m = \int_{l_1}^{l_2} \rho(l)dl$
6	Q - кількість теплоти c – питома теплоємність	$c(t)=Q'(t)$	$Q = \int_{t_1}^{t_2} c(t)dt$
7	V- об'єм продукції $y = f(t)$ - продуктивність праці	$y(t) = V'(t)$	$V = \int_{t_1}^{t_2} f(t)dt$

Приклад 1. Тіло рухається прямолінійно з швидкістю $\upsilon(t) = (3t^2 + 4t + 1)$ м/с. Знайти шлях, пройдений тілом за перші 3 с.

Розв'язання.

За формулою (1) дістанемо

$$S = \int_0^3 (3t^2 + 4t + 1)dt = (t^3 + 2t^2 + t)\Big|_0^3 = 48 \quad (м)$$

Приклад 2. Сила пружності пружини, розтягнутої на 0,05м, дорівнює 3H. Яку роботу треба виконати, щоб розтягти пружину на ці 0,05м?

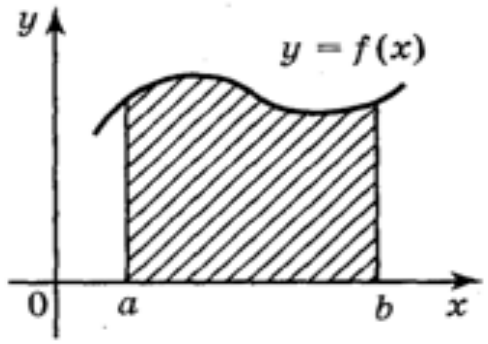
Розв'язання. За законом Гука сила F, яка розтягує або стискає пружину, пропорційна цьому розтягу або стиску, тобто $F = kx$, де x – величина розтягу або стиску, k - коефіцієнт пропорційності. З умови випливає, що $3 = k \cdot 0{,}05$, тобто $k=60$, отже, $F=60x$.

Використовуючи формулу (2), отримаємо:

$$A = \int_0^{0,05} 60x dx = 30x^2\Big|_0^{0,05} = 0{,}075 \quad \text{(Дж)}.$$

5.4 Геометричний зміст визначеного інтегралу

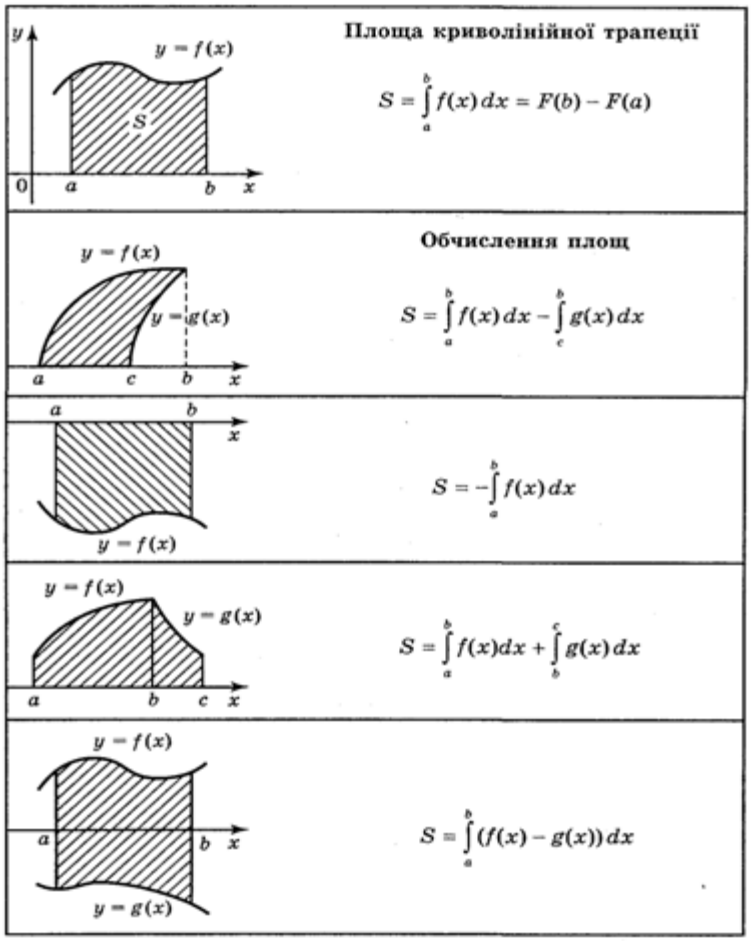
Криволінійною трапецією називається фігура, обмежена графіком неперервної функції $y = f(x)$, яка не змінює знак на відрізку $[a; b]$, прямими $x = a$, $x = b$ і відрізком $[a; b]$.



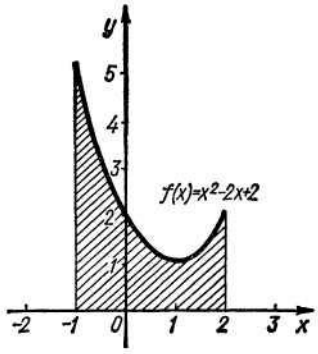
Розглянемо криволінійну трапецію, обмежену графіком невід'ємної, неперервної функції $y = f(x)$, $x \in [a;b]$, відрізком $[a;b]$ осі Ox, відрізками прямих $x=a$ і $x = b(a < b)$. У цьому разі площа криволінійної трапеції, як відомо, обчислюється за формулою

$$S = \int_a^b f(x)dx$$

Обчислення площ плоских фігур



Приклад 1. Обчислити площу плоскої фігури, обмеженої лініями $y = f(x) = x^2 - 2x + 2,\ x = -1,\ x = 2$ і відрізком $[-1;2]$ осі *Ox*.

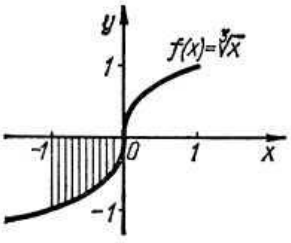


Розв'язання. Ця плоска фігура являє собою криволінійну трапецію, тому її площу обчислюють за формулою (1):

$$S = \int_{-1}^{2} (x^2 - 2x + 2)dx = \frac{x^3}{3}\Big|_{-1}^{2} - x^2\Big|_{-1}^{2} + 2x\Big|_{-1}^{2} = 6.$$

Відповідь: 6 кв.од.

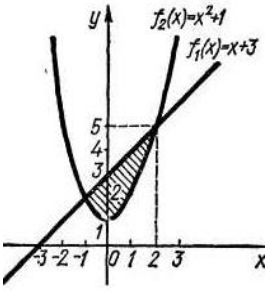
Приклад 2. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями $y = f(x) = \sqrt[3]{x}$, $x = -1$ і віссю Ox.



Розв'язання. Графік функції $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $x \in [-1;0]$ лежить під віссю Ox, тому для обчислення площі даної плоскої фігури застосовуємо формулу (2):

$$S = -\int_{-1}^{0} \sqrt[3]{x}dx = -\frac{3}{4}x^{4/3}\Big|_{-1}^{0} = \frac{3}{4}.$$

Відповідь: $\frac{4}{3}$ *кв.од.*



Приклад 3. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями $y = f_1(x) = x + 3$ і $y = f_2(x) = x^2 + 1$

Розв'язання. Розв'язавши рівняння $x + 3 = x^2 + 1$, знайдемо абсциси точок перетину графіків функцій f_1 і f_2: $x_1 = -1$ і $x_2 = 2$. Використовуючи формулу (4), обчислимо площу фігури:

$$S = \int_{-1}^{2} (x + 3 - (x^2 + 1))dx = \int_{-1}^{2} (-x^2 + x + 2)dx = -\frac{1}{3}x^3 \Big|_{-1}^{2} + \frac{1}{2}x^2 \Big|_{-1}^{2} + 2x \Big|_{-1}^{2} = \frac{9}{2}.$$

Відповідь: 4,5кв.од.

Використана література

1. Бабенко С.П. Усі уроки алгебри і початків аналізу. 10 клас. Академічний рівень. – Х.: Вид.група «Основа», 2010.
2. Мерзляк А.Г. Алгебра і початки аналізу : підруч. для 10 кл. загальноосвіт. навч. закладів : проф.. рівень – Х . :Гімназія, 2010
3. Алгебра: Підруч. для 9 кл.серед. шк../ Ю.М. Макаревич, Н.Г.Миндюк, К.І.Нєшков -. : Рад.шк.,1991
4. Каплун О. І. Алгебра і початки аналізу + геометрія. 10 клас: Навчально-методичний посібник. - Харків: ФОП Співак В. Л., 2010.- 320 с.
5. Корнієнко Т. Л. Алгебра і початки аналізу. 10 клас. Профільний рівень: Розробки уроків/Т. Л. Корнієнко, В. І. Фіготіна. - Х.: Видавництво «Ранок», 2011.- 496 с.- (Профільна школа). + Додаток (16 с.)
6. Роганін О. М. Алгебра і початки аналізу: 10 клас: Плани-конспекти уроків. - Х.: Світ дитинства, 2002.- 256 с.
7. Роганін О. М., Каплун О. І. Математика: Практичний довідник. - Харків: ФОП Співак Т. К., 2009.- 416 с.
8. Шкіль М. І. та ін. Алгебра і початки аналізу: Підруч. для 10 кл. загальноосвіт. навч. закладів/ М. І. Шкіль, З. І. Слєпкань, О. С. Дубинчук. - К.: Зодіак - ЕКО, 2002.- 272 с.

Зміст

1 Тема 1: Функії, їх властивості та графіки

1.1 Функція та її основні властивості…….. 3

1.2 Корінь п-го степеня. Аріфметичний корінь……. 7

1.3 Степені з раціональним показником, їхні властивості 8

1.4 Ірраціональні рівняння……... 8

2 Тема 2: Показникова та логарифмічна функції…….

2.1 Показникова та логарифмічна функції їх властивості та графіки…… 10

2.2 Логарифми та їх властивості……. 11

2.3 Показникові рівняння та нерівності……. 13

2.4 Логарифмічні рівняння та нерівності…… 16

3 Тема 3: Тріонометрія

3.1 Синус, косинус, тангенс і катангенс кута. Основні формули…….. 20

3.2 Обернені тригонометричні функції…… 24

3.3 Тригонометричні рівняння…….. 25

3.3.1 Найпростіші тригонометричні рівняння……... 25

3.3.2 Класифікація тригонометричних рівнянь за методами їх розв’язання……. 26

3.4 Тригонометричні нерівності…… 29

4 Тема4. Похідна та її застосування

4.1 Похідна. Основні правила диференціювання. Похідні основних елементарних функцій……... 30

4.2 Похідна складеної функції……. 32

4.3 Механічний зміст похідної…….. 33

4.4 Геометричний зміст похідної . Рівняння дотичної….. 33

4.5 Ознаки зростання (спадання) функції на проміжку…. 34

4.6 Дослідження функції на екстремум……... 35

4.7 Дослідення функції за допомогою похідної…….. 36

4.8 Знаходження найбільшого значення функції на відрізку……. 38

5 Тема 5. Інтеграл та його застосування……

5.1 Первісна та її властивості. Невизначений інтеграл 39

5.2 Визначенний інтеграл…….. 42

5.3 Фізичний зміст визначеного інтегралу……... 44

5.4 Геометричний зміст визначеного інтегралу…….. 45

6 Використана література……... 48